

# **Fondamenti della matematica**

## Lezione 3: il programma di Hilbert e l'intuizionismo

---

Zona Autonoma Milano, 31 marzo 2026

La matematica come problema filosofico: integrazione di **ontologia** e **epistemologia**.

La matematica come problema filosofico: integrazione di **ontologia** e **epistemologia**.

**Formalismo:** le proposizioni della matematica **non** sono **significative**.

La matematica come problema filosofico: integrazione di **ontologia** e **epistemologia**.

**Formalismo:** le proposizioni della matematica **non** sono **significative**.

- **Term formalism:** il loro significato sono i **simboli** che le compongono;

La matematica come problema filosofico: integrazione di **ontologia** e **epistemologia**.

**Formalismo:** le proposizioni della matematica **non** sono **significative**.

- **Term formalism:** il loro significato sono i **simboli** che le compongono;
- **Game formalism:** matematica come **gioco** in cui si muovono simboli secondo certe regole.

La matematica come problema filosofico: integrazione di **ontologia** e **epistemologia**.

**Formalismo:** le proposizioni della matematica **non** sono **significative**.

- **Term formalism:** il loro significato sono i **simboli** che le compongono;
- **Game formalism:** matematica come **gioco** in cui si muovono simboli secondo certe regole.

**Problema:** ragionare sui giochi che giochiamo.

# **Il programma di Hilbert**

---





**Matematica:** enunciati **della** matematica, mosse di un gioco.

**Matematica:** enunciati **della** matematica, mosse di un gioco.

$"2 + 2 = 4" \leftrightarrow "torre\ in\ c5"$ .

**Matematica:** enunciati **della** matematica, mosse di un gioco.

$"2 + 2 = 4" \leftrightarrow "torre \text{ in } c5"$ .

**Metamematica:** enunciati **sulla** matematica, riflessioni su un gioco.

**Matematica:** enunciati **della** matematica, mosse di un gioco.

“ $2 + 2 = 4$ ”  $\leftrightarrow$  “torre in c5”.

**Metamatemica:** enunciati **sulla** matematica, riflessioni su un gioco.

“Questa teoria non è contraddittoria”  $\leftrightarrow$  “scacco in 5 mosse”.

**Matematica:** enunciati **della** matematica, mosse di un gioco.

“ $2 + 2 = 4$ ”  $\leftrightarrow$  “torre in c5”.

**Metamatematica:** enunciati **sulla** matematica, riflessioni su un gioco.

“Questa teoria non è contraddittoria”  $\leftrightarrow$  “scacco in 5 mosse”.

In che linguaggio parliamo **di** matematica?

## Intermezzo: perché non vogliamo le contraddizioni

**Ex falso quodlibet:** dal falso segue qualsiasi cosa.

## Intermezzo: perché non vogliamo le contraddizioni

**Ex falso quodlibet:** dal falso segue qualsiasi cosa.

In logica “se  $P$  allora  $Q$ ” significa “non  $P$  oppure  $Q$ ” cioè “non può valere  $P$  e non  $Q$ ”.

## Intermezzo: perché non vogliamo le contraddizioni

**Ex falso quodlibet:** dal falso segue qualsiasi cosa.

In logica “se  $P$  allora  $Q$ ” significa “non  $P$  oppure  $Q$ ” cioè “non può valere  $P$  e non  $Q$ ”.

Ma allora se  $P$  non vale  $Q$  può essere qualsiasi cosa!



## Intermezzo: perché non vogliamo le contraddizioni

**Ex falso quodlibet:** dal falso segue qualsiasi cosa.

In logica “se  $P$  allora  $Q$ ” significa “non  $P$  oppure  $Q$ ” cioè “non può valere  $P$  e non  $Q$ ”.

Ma allora se  $P$  non vale  $Q$  può essere qualsiasi cosa!

“ Se i maiali volano allora la Terra è tonda”.

## Intermezzo: perché non vogliamo le contraddizioni

**Ex falso quodlibet:** dal falso segue qualsiasi cosa.

In logica “se  $P$  allora  $Q$ ” significa “non  $P$  oppure  $Q$ ” cioè “non può valere  $P$  e non  $Q$ ”.

Ma allora se  $P$  non vale  $Q$  può essere qualsiasi cosa!

“ Se i maiali volano allora la Terra è tonda”.

“ Se i maiali volano allora la Terra è piatta”.

## Intermezzo: perché non vogliamo le contraddizioni

**Ex falso quodlibet:** dal falso segue qualsiasi cosa.

In logica “se  $P$  allora  $Q$ ” significa “non  $P$  oppure  $Q$ ” cioè “non può valere  $P$  e non  $Q$ ”.

Ma allora se  $P$  non vale  $Q$  può essere qualsiasi cosa!

“ Se i maiali volano allora la Terra è tonda”.

“ Se i maiali volano allora la Terra è piatta”.

Una teoria che contiene una contraddizione è **forte** (dimostra qualsiasi cosa) ma anche **non interessante**.

La parte di matematica con contenuto è quella **finitaria**.

La parte di matematica con contenuto è quella **finitaria**.

**Giustificazioni:**

La parte di matematica con contenuto è quella **finitaria**.

### **Giustificazioni:**

- Posso usare il **term formalism**.

La parte di matematica con contenuto è quella **finitaria**.

### **Giustificazioni:**

- Posso usare il **term formalism**.
- Posso appellarmi di nuovo a qualche forma di **facoltà della ragione**.

La parte di matematica con contenuto è quella **finitaria**.

### **Giustificazioni:**

- Posso usare il **term formalism**.
- Posso appellarmi di nuovo a qualche forma di **facoltà della ragione**.

La parte di matematica che ha a che fare con l'**infinito** è puramente **formale**.



**Problema:** mi serve comunque qualche forma di infinito.

**Problema:** mi serve comunque qualche forma di infinito.

Infinito **potenziale**: possibilità di continuare a ripetere un operazione.

**Problema:** mi serve comunque qualche forma di infinito.

Infinito **potenziale**: possibilità di continuare a ripetere un operazione.

Infinito **attuale**: una quantità infinita **attualmente** presente.

**Problema:** mi serve comunque qualche forma di infinito.

Infinito **potenziale**: possibilità di continuare a ripetere un operazione.

Infinito **attuale**: una quantità infinita **attualmente** presente.

**Idea:** mi basta quello potenziale.

A cosa mi serve l'infinito:

A cosa mi serve l'infinito:

- infiniti simboli per i naturali: ok;

A cosa mi serve l'infinito:

- infiniti simboli per i naturali: ok;
- proposizioni del tipo “per ogni  $n$  vale  $P(n)$ ”

A cosa mi serve l'infinito:

- infiniti simboli per i naturali: ok;
- proposizioni del tipo “per ogni  $n$  vale  $P(n)$ ”

Ma per quest'ultime posso tradurle in (tante) **singole** proposizioni  $P(a)$ .



A cosa mi serve l'infinito:

- infiniti simboli per i naturali: ok;
- proposizioni del tipo “per ogni  $n$  vale  $P(n)$ ”

Ma per quest'ultime posso tradurle in (tante) **singole** proposizioni  $P(a)$ .

**Problema:** questo non funziona con le **negazioni** degli universali ( “non per ogni  $n$  vale  $P(n)$ ” )!

La matematica finitaria è molto debole, posso immaginare i concetti di quella infinitaria come **elementi ideali**. Finzioni utili a dimostrare delle cose significative.

La matematica finitaria è molto debole, posso immaginare i concetti di quella infinitaria come **elementi ideali**. Finzioni utili a dimostrare delle cose significative.

Questo solo a patto di dimostrare che questi nuovi oggetti **non introducano contraddizioni**.

# **Il teorema di Gödel**

---

# I teoremi di incompletezza di Gödel

1930: Kurt Gödel (1906-78) mostra due teoremi.

# I teoremi di incompletezza di Gödel

1930: Kurt Gödel (1906-78) mostra due teoremi.

## Primo teorema di incompletezza

- Ogni sistema formale coerente e capace di esprimere l'aritmetica **finitaria** è **incompleto**.

# I teoremi di incompletezza di Gödel

1930: Kurt Gödel (1906-78) mostra due teoremi.

## Primo teorema di incompletezza

- Ogni sistema formale coerente e capace di esprimere l'aritmetica **finitaria** è **incompleto**.
- Esistono proposizioni aritmetiche non dimostrabili e di cui non si può dimostrare nemmeno la negazione.

# I teoremi di incompletezza di Gödel

1930: Kurt Gödel (1906-78) mostra due teoremi.

## Primo teorema di incompletezza

- Ogni sistema formale coerente e capace di esprimere l'aritmetica **finitaria** è **incompleto**.
- Esistono proposizioni aritmetiche non dimostrabili e di cui non si può dimostrare nemmeno la negazione.

## Secondo teorema di incompletezza

- Nessun sistema formale coerente e capace di esprimere l'aritmetica finitaria **consistenza**.



# Idea della dimostrazione del primo teorema

## 1. Aritmetizzazione della sintassi

- Formule e dimostrazioni vengono codificate con numeri naturali (**numerazione di Gödel**).

# Idea della dimostrazione del primo teorema

## 1. Aritmetizzazione della sintassi

- Formule e dimostrazioni vengono codificate con numeri naturali (**numerazione di Gödel**).
- Le proprietà sintattiche diventano proprietà aritmetiche.

# Idea della dimostrazione del primo teorema

## 1. Aritmetizzazione della sintassi

- Formule e dimostrazioni vengono codificate con numeri naturali (**numerazione di Gödel**).
- Le proprietà sintattiche diventano proprietà aritmetiche.

## 2. Autoreferenzialità

- Si costruisce una formula  $G$  che afferma:

“ $G$  non è dimostrabile nel sistema”

# Idea della dimostrazione del primo teorema

## 1. Aritmetizzazione della sintassi

- Formule e dimostrazioni vengono codificate con numeri naturali (**numerazione di Gödel**).
- Le proprietà sintattiche diventano proprietà aritmetiche.

## 2. Autoreferenzialità

- Si costruisce una formula  $G$  che afferma:

“ $G$  non è dimostrabile nel sistema”

## 3. Conseguenza

- Se il sistema è coerente,  $G$  non è dimostrabile.

# Idea della dimostrazione del primo teorema

## 1. Aritmetizzazione della sintassi

- Formule e dimostrazioni vengono codificate con numeri naturali (**numerazione di Gödel**).
- Le proprietà sintattiche diventano proprietà aritmetiche.

## 2. Autoreferenzialità

- Si costruisce una formula  $G$  che afferma:

“ $G$  non è dimostrabile nel sistema”

## 3. Conseguenza

- Se il sistema è coerente,  $G$  non è dimostrabile.
- Se la negazione di  $G$  fosse dimostrabile potremmo costruire una dimostrazione di  $G$ : contraddizione!.

# Idea della dimostrazione del secondo teorema

## 1. Formalizzare la consistenza

- La consistenza del sistema  $T$  può essere espressa da una formula:  $\text{Con}(T)$  che afferma che non esiste una dimostrazione di contraddizioni.

# Idea della dimostrazione del secondo teorema

## 1. Formalizzare la consistenza

- La consistenza del sistema  $T$  può essere espressa da una formula:  $\text{Con}(T)$  che afferma che non esiste una dimostrazione di contraddizioni.

## 2. Collegamento con la frase di Gödel

- Si dimostra che nel sistema vale:

$$\text{Con}(T) \rightarrow G$$

dove  $G$  è la frase di Gödel.

# Idea della dimostrazione del secondo teorema

## 1. Formalizzare la consistenza

- La consistenza del sistema  $T$  può essere espressa da una formula:  $\text{Con}(T)$  che afferma che non esiste una dimostrazione di contraddizioni.

## 2. Collegamento con la frase di Gödel

- Si dimostra che nel sistema vale:

$$\text{Con}(T) \rightarrow G$$

dove  $G$  è la frase di Gödel.

## 3. Conseguenza

- Se il sistema dimostrasse  $\text{Con}(T)$ , allora dimostrerebbe anche  $G$ .



# Idea della dimostrazione del secondo teorema

## 1. Formalizzare la consistenza

- La consistenza del sistema  $T$  può essere espressa da una formula:  $\text{Con}(T)$  che afferma che non esiste una dimostrazione di contraddizioni.

## 2. Collegamento con la frase di Gödel

- Si dimostra che nel sistema vale:

$$\text{Con}(T) \rightarrow G$$

dove  $G$  è la frase di Gödel.

## 3. Conseguenza

- Se il sistema dimostrasse  $\text{Con}(T)$ , allora dimostrerebbe anche  $G$ .
- Ma dal primo teorema sappiamo che  $G$  non è dimostrabile.

# L'intuizionismo

---

Dopo i teoremi di Gödel due vie di fuga:

Dopo i teoremi di Gödel due vie di fuga:

- giustificare qualcosa in più dell'aritmetica finitaria in termini di **verità**;

Dopo i teoremi di Gödel due vie di fuga:

- giustificare qualcosa in più dell'aritmetica finitaria in termini di **verità**;
- limitarsi alla matematica finitaria.

Dopo i teoremi di Gödel due vie di fuga:

- giustificare qualcosa in più dell'aritmetica finitaria in termini di **verità**;
- limitarsi alla matematica finitaria.

Brouwer (1881-1966): sviluppare al massimo la matematica con solo metodi finiti.

**Costruttivismo:** dimostrare che **esiste** un oggetto significa dare una sua **costruzione**.

Dopo i teoremi di Gödel due vie di fuga:

- giustificare qualcosa in più dell'aritmetica finitaria in termini di **verità**;
- limitarsi alla matematica finitaria.

Brouwer (1881-1966): sviluppare al massimo la matematica con solo metodi finiti.

**Costruttivismo:** dimostrare che **esiste** un oggetto significa dare una sua **costruzione**. Ma dobbiamo rinunciare al terzo escluso ( $\text{non}(\text{non } P) \neq P$ )!

Dopo i teoremi di Gödel due vie di fuga:

- giustificare qualcosa in più dell'aritmetica finitaria in termini di **verità**;
- limitarsi alla matematica finitaria.

Brouwer (1881-1966): sviluppare al massimo la matematica con solo metodi finiti.

**Costruttivismo:** dimostrare che **esiste** un oggetto significa dare una sua **costruzione**. Ma dobbiamo rinunciare al terzo escluso ( $\text{non}(\text{non } P) \neq P$ )!

**Antirealismo:** non esistono oggetti matematici, ma solo le costruzioni **mentali** corrispondenti.



**Obiezione:** numeri naturali diversi tra mente e mente.

**Obiezione:** numeri naturali diversi tra mente e mente.

**Risposta:** c'è qualche facoltà comune a tutte le menti.

**Obiezione:** numeri naturali diversi tra mente e mente.

**Risposta:** c'è qualche facoltà comune a tutte le menti.

**Contro-obiezione:** allora le verità matematica dipendono da quando vengono scoperte!

**Obiezione:** numeri naturali diversi tra mente e mente.

**Risposta:** c'è qualche facoltà comune a tutte le menti.

**Contro-obiezione:** allora le verità matematica dipendono da quando vengono scoperte!

**Conclusione:** si sposta l'attenzione sulla **provabilità**.

**Interpretazione BHK:** interpretare le formule in base alla loro **realizzabilità**

**Interpretazione BHK:** interpretare le formule in base alla loro **realizzabilità**

Si fissa un modello di **computabilità** (un modello di come funziona un computer) e dire che una formula è **vera** significa che ha un **realizzatore**.

- “ non A ” è la derivazione di una contraddizione assumendo A;

**Interpretazione BHK:** interpretare le formule in base alla loro **realizzabilità**

Si fissa un modello di **computabilità** (un modello di come funziona un computer) e dire che una formula è **vera** significa che ha un **realizzatore**.

- “ non  $A$  ” è la derivazione di una contraddizione assumendo  $A$ ;
- “ $P$  o  $Q$ ” è un realizzatore per  $P$  o uno per  $Q$ ;

**Interpretazione BHK:** interpretare le formule in base alla loro **realizzabilità**

Si fissa un modello di **computabilità** (un modello di come funziona un computer) e dire che una formula è **vera** significa che ha un **realizzatore**.

- “ non  $A$  ” è la derivazione di una contraddizione assumendo  $A$ ;
- “ $P$  o  $Q$ ” è un realizzatore per  $P$  o uno per  $Q$ ;
- “ $P$  e  $Q$ ” è un realizzatore per  $P$  e uno per  $Q$ ;



**Interpretazione BHK:** interpretare le formule in base alla loro **realizzabilità**

Si fissa un modello di **computabilità** (un modello di come funziona un computer) e dire che una formula è **vera** significa che ha un **realizzatore**.

- “ non  $A$  ” è la derivazione di una contraddizione assumendo  $A$ ;
- “ $P$  o  $Q$ ” è un realizzatore per  $P$  o uno per  $Q$ ;
- “ $P$  e  $Q$ ” è un realizzatore per  $P$  e uno per  $Q$ ;
- “esiste  $x$  tale che  $P$ ” è un oggetto  $a$  e una prova che  $P(A)$ ;

**Interpretazione BHK:** interpretare le formule in base alla loro **realizzabilità**

Si fissa un modello di **computabilità** (un modello di come funziona un computer) e dire che una formula è **vera** significa che ha un **realizzatore**.

- “ non  $A$  ” è la derivazione di una contraddizione assumendo  $A$ ;
- “ $P$  o  $Q$ ” è un realizzatore per  $P$  o uno per  $Q$ ;
- “ $P$  e  $Q$ ” è un realizzatore per  $P$  e uno per  $Q$ ;
- “esiste  $x$  tale che  $P$ ” è un oggetto  $a$  e una prova che  $P(a)$ ;
- “per ogni  $x$  vale  $P$ ” è una prova di  $P(a)$  per ogni oggetto  $a$ .

Esistono due numeri irrazionali  $a$  e  $b$  tali che  $a^b$  è razionale?

## Una strana dimostrazione

Esistono due numeri irrazionali  $a$  e  $b$  tali che  $a^b$  è razionale?

- se  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  è razionale allora  $a = b = \sqrt{2}$  funziona;

# Una strana dimostrazione

Esistono due numeri irrazionali  $a$  e  $b$  tali che  $a^b$  è razionale?

- se  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  è razionale allora  $a = b = \sqrt{2}$  funziona;
- se  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  non è razionale allora considero  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  e  $b = \sqrt{2}$  e ho:

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

# Una strana dimostrazione

Esistono due numeri irrazionali  $a$  e  $b$  tali che  $a^b$  è razionale?

- se  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  è razionale allora  $a = b = \sqrt{2}$  funziona;
- se  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  non è razionale allora considero  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  e  $b = \sqrt{2}$  e ho:

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Ma la dimostrazione non mi fornisce i due  $a$  e  $b$  voluti.

## Non ci sono funzioni discontinue

Partendo dagli assiomi di Peano si possono costruire i numeri naturali e poi i reali senza usare il terzo escluso. **Analisi intuizionista.**

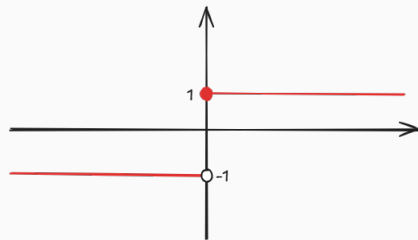
# Non ci sono funzioni discontinue

Partendo dagli assiomi di Peano si possono costruire i numeri naturali e poi i reali senza usare il terzo escluso. **Analisi intuizionista.**

Stranezze:

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

**non** è definibile.





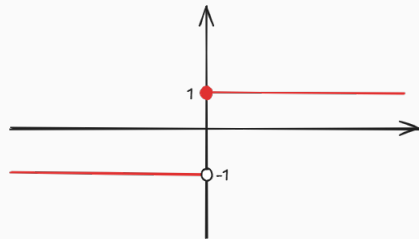
# Non ci sono funzioni discontinue

Partendo dagli assiomi di Peano si possono costruire i numeri naturali e poi i reali senza usare il terzo escluso. **Analisi intuizionista.**

Stranezze:

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

**non** è definibile.



## Teorema

**Tutte** le funzioni da  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono **continue**.